

**Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение  
высшего образования  
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»  
(Финансовый университет)»  
Пермский финансово-экономический колледж -  
Пермский филиал Финансового университета**

**РЕКОМЕНДОВАНО**

на заседании ПЦК ОГСД  
Протокол № 11 от 25 июня 2024 г.  
Председатель ПЦК, к.п.н.



М.Л. Катаева

**УТВЕРЖДАЮ**

Заместитель директора по учебно-  
методической работе



Ю.А. Хакимова

«27» июня 2024 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**учебной дисциплине ОПБ. 13**

**МАТЕМАТИКА по теме «Векторы».**

Специальности 38.02.02 Страхование дело

Пермь, 2024 г.

Одобрено на заседании Научно-методического совета  
протокол № 1 (51) от 26 октября 2024 г.

Автор-составитель: Виноградова Н.А., преподаватель Пермского филиала Финансового университета.

Методические рекомендации учебной дисциплине ОПБ. 13 МАТЕМАТИКА по теме «Векторы» (базовый уровень) для студентов специальности 38.02.02 Страхование дело/ сост. Н.А. Виноградова. – Пермь: Пермский филиал ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», 2024. – 25 с.

## Содержание

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| Пояснительная записка.....                                               | 4  |
| 1. Основные понятия и определения.....                                   | 5  |
| 1.1 Понятие вектора .....                                                | 5  |
| 1.2. Коллинеарные векторы.....                                           | 6  |
| 1.3. Равенство векторов .....                                            | 7  |
| 2. Линейные операции над векторами .....                                 | 7  |
| 2.1. Сложение векторов .....                                             | 8  |
| 2.2. Вычитание векторов .....                                            | 10 |
| 2.3. Умножение вектора на число.....                                     | 11 |
| 2.4. Угол между двумя векторами .....                                    | 11 |
| 3. Прямоугольная система координат.....                                  | 12 |
| 3.1. Угол между векторами и осью.....                                    | 12 |
| 3.2. Проекция вектора на ось .....                                       | 12 |
| 3.3. Прямоугольная система координат .....                               | 13 |
| 3.4. Координаты вектора.....                                             | 14 |
| 3.5. Разложение вектора по координатными осям.....                       | 14 |
| 3.6. Правила действия над векторами, заданными своими координатами ..... | 15 |
| 3.7. Условие коллинеарности двух векторов .....                          | 15 |
| 3.8. Длина вектора. Расстояние между точками на плоскости.....           | 15 |
| 3.10. Деление отрезка в данном отношении .....                           | 17 |
| Вопросы для самоконтроля.....                                            | 18 |
| Примеры решения задач.....                                               | 20 |
| Список литературы .....                                                  | 25 |

## Пояснительная записка

Методические рекомендации по дисциплине «Математика» по теме «Векторы» предназначены для студентов, обучающихся на базе основного общего образования, по программам подготовки специалистов среднего звена, для специальностей 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям), 38.02.02 Страхование дело (по отраслям), 38.02.06 Финансы, 40.02.01 Право и организация социального обеспечения, 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Метапредметные и предметные результаты освоения учебной дисциплины «Математика» по заданной теме:

- М-1-умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях (М-1);
- М-5-владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения.
- П-2 - сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
- П-3-владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- П-6-владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

Методические рекомендации содержат основные теоретические аспекты и примеры решения практических упражнений темы «Векторы», что позволяет повторить тему, по которой выполняются задания с применением элементов дистанционных образовательных технологий и электронного обучения. В разработке имеются необходимые чертежи, справочные

сведения. Методические рекомендации составлены в соответствии с Рабочей программой учебной дисциплины ОУД.9.Математика (базовый уровень).

## 1. Основные понятия и определения

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются **скалярными**.

Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объём, температура, работа, масса.

Другие величины, например, сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие векторы называются **векторными**.

### 1.1 Понятие вектора

**Вектор**- это направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление.

Вектор, заданный парой  $(A, B)$  несовпадающих точек, обозначаемых символом  $\overrightarrow{AB}$

Точка  $A$  называется **началом**, а точка  $B$  – **концом вектора**.

Для обозначения векторов употребляется также строчные латинские буквы со стрелкой наверху:

$$\overrightarrow{a} \quad \overrightarrow{b} \quad \overrightarrow{c} \quad \dots \quad \overrightarrow{x} \quad \overrightarrow{y}$$

Длиной или модулем вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется длина отрезка и обозначается  $|\overrightarrow{AB}|$  или  $|\mathbf{a}|$ .

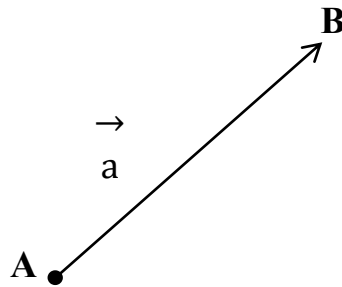
Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор называется нулевым и обозначается  $\vec{0}$ .

Длина нулевого вектора равна нулю. Понятие направления не вводится.

Итак, каждый вектор, отличный от нулевого, имеет три характеристики:

1. Начальную точку.
2. Длину (модуль вектора).

### 3. Направление.



#### 1.2. Коллинеарные векторы

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

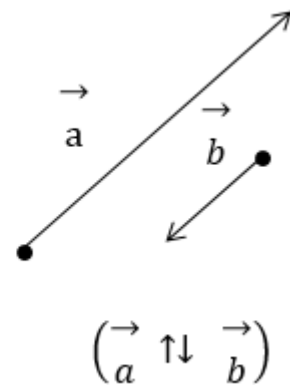
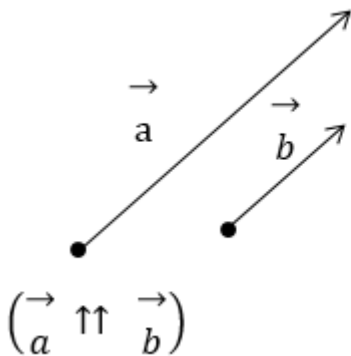
Записываются:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Коллинеарные вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  могут быть направлены **одинаково** или **противоположно**.

В первом случае векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **сонаправленными**  
 $(\vec{a} \uparrow \vec{b})$

Во-втором,- **противоположно направленными**  $(\vec{a} \updownarrow \vec{b})$ .



### 1.3. Равенство векторов

Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **равными**

$(\vec{a} = \vec{b})$ , если они одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку пространства.

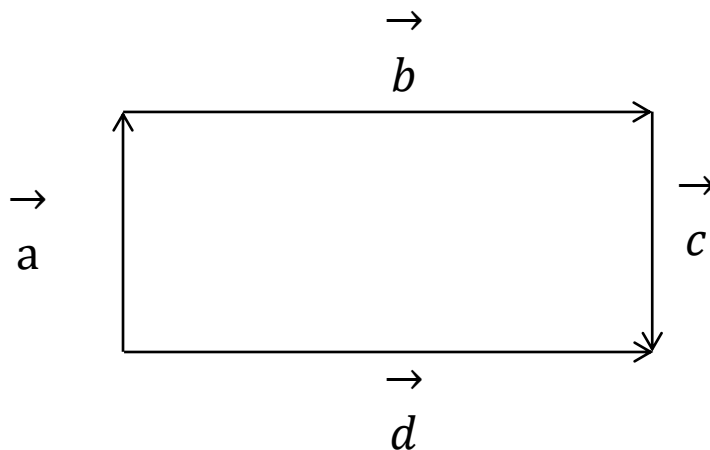


Рис.3

На рис. 3 векторы образуют прямоугольник.

Справедливо равенство

$$\vec{b} = \vec{d}, \text{ но } \vec{a} \neq \vec{c}$$

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  - противоположны. Они имеют одинаковую длину, но противоположные по направлению

$$(\vec{a} = -\vec{c})$$

### 2. Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

## 2.1. Сложение векторов

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - два произвольных вектора. Возьмём произвольную точку  $O$  и построим вектор  $\vec{OA} = \vec{a}$ . От точки  $A$  отложим вектор  $\vec{AB} = \vec{b}$ .

Вектор  $\vec{OB}$ , соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

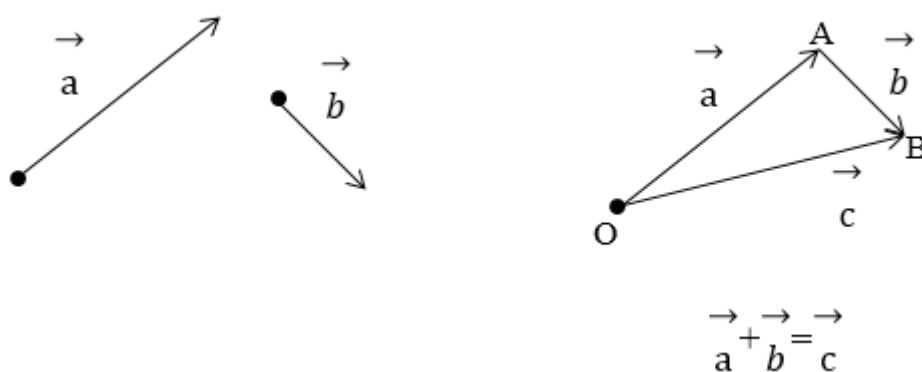


Рис. 4

Это правило сложения векторов называется правилом **треугольника**.

Сумма двух векторов можно построить также по правилу параллелограмма:

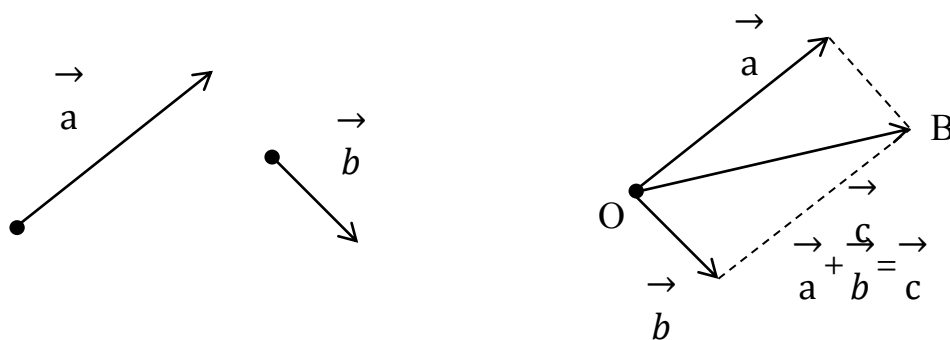


Рис. 5



Если необходимо сложить три и более векторов, то применяется **правило многоугольника**:

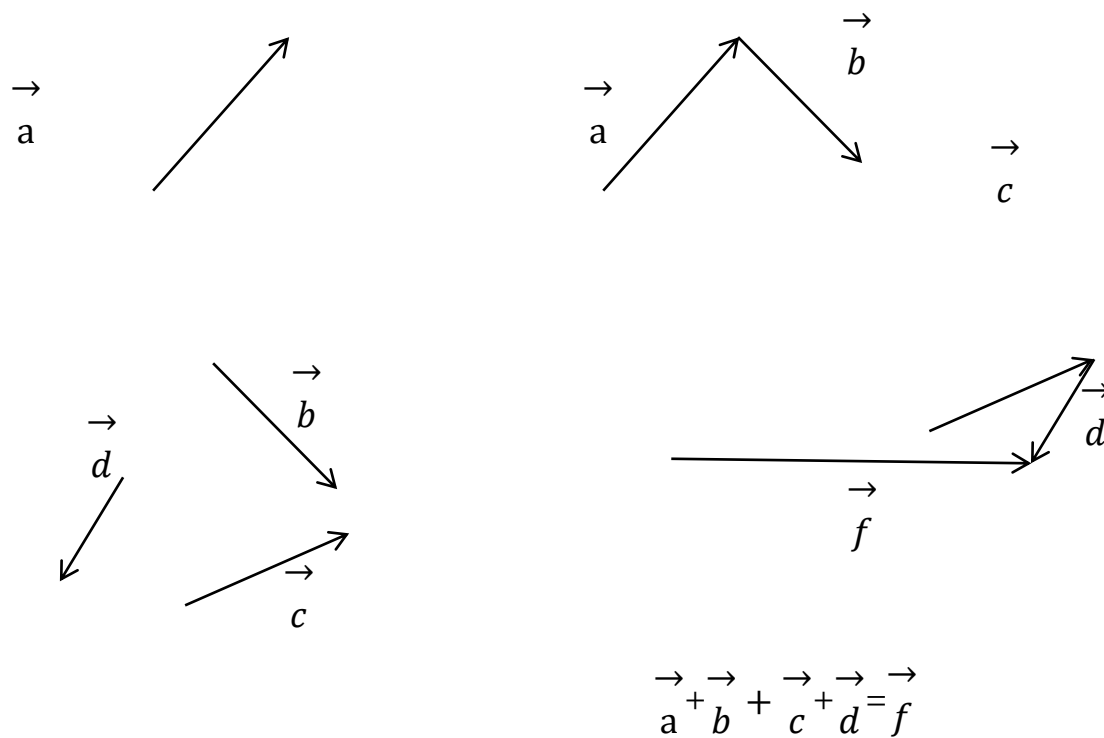


Рис. 6

## 2.2. Вычитание векторов

Под разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  понимается вектор  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$  такой, что  $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$



Рис.7

Можно вычитать векторы по правилу сложения:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ , т.е. вычитание векторов заменить сложением вектора  $\vec{a}$  с вектором, противоположным вектору  $\vec{b}$ .

В параллелограмме, построенном на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , одна направленная диагональ является суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , одна направленная диагональ является суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , другая – разность.  $\vec{a} + \vec{b}$

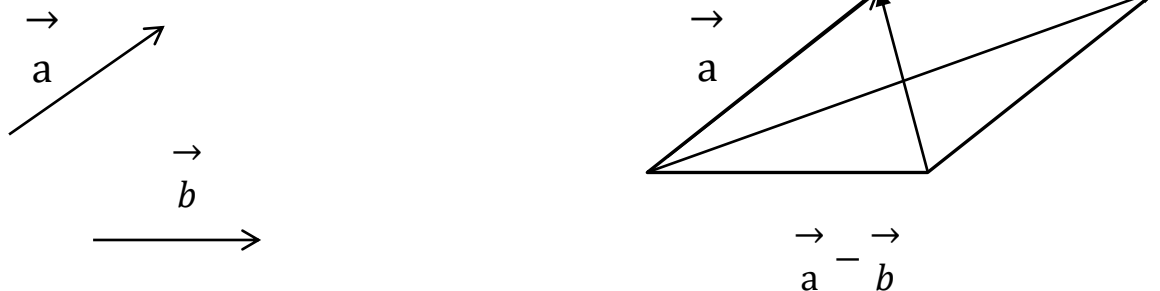


Рис. 8

### 2.3. Умножение вектора на число

Произведением нулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $m$  называется вектор, имеющий направление вектора  $\vec{a}$ , если  $m > 0$  и противоположное направление, если  $m < 0$ . Длина этого вектора равна произведению длины вектора  $\vec{a}$  на модуль числа  $m$ .

Произведение вектора  $\vec{a}$  на число  $m$  обозначается  $m\vec{a}$ . При любых  $m$  и  $\vec{a}$  векторы  $m\vec{a}$  и  $\vec{a}$  коллинеарны и  $|m\vec{a}| = |m| * |\vec{a}|$ .

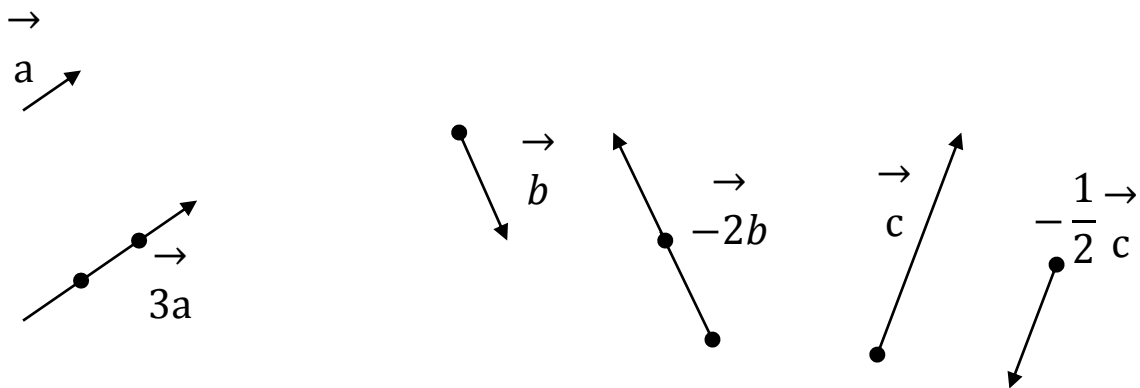


Рис. 9

### 2.4. Угол между двумя векторами

Угол между двумя нулевыми векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется угол между равными им векторами с общим началом.

Обозначается:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq 180^\circ.$$

Частные случаи:

а) Если  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ , то  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

б) Если  $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$ , то  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

в) Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$

Если угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $90^\circ$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **перпендикулярными** или (**ортогональными**).

### 3. Прямоугольная система координат

#### 3.1. Угол между векторами и осью

Прямая, на которой выбрано положительное направление и задана единица измерения длины, называется **осью**.

Вектор  $\vec{e}$ , имеющий длину  $|\vec{e}| = 1$  и направление, совпадающее с направлением оси, называется **единичным вектором** или **ортом** этой оси.

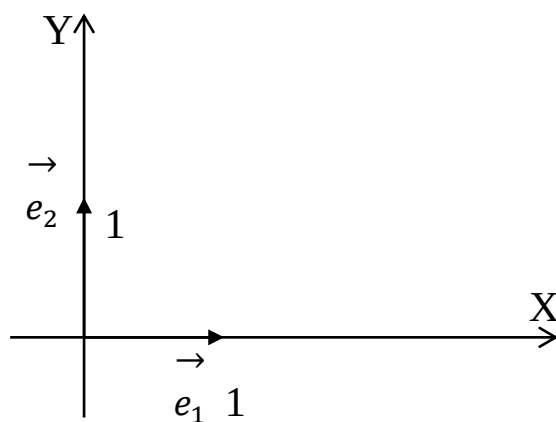


Рис. 10

Угол между нулевым вектором  $\vec{a}$  и осью  $l$  называется угол между направлениями оси и вектора

$$(\vec{a} \wedge_e) = \alpha, \text{ где } 0 \leq \alpha \leq 180^\circ \text{ (см. рис. 12).}$$

#### 3.2. Проекция вектора на ось

Проекцией на ось называется направленный отрезок на оси, начало которого есть проекция начала вектора, а конец- проекция его конца.

Длина этого направленного отрезка берётся со знаком плюс, если направления отрезка и оси совпадают со знаком минус, если их направления противоположны.

Проекция вектора  $\vec{a} \neq 0$  на ось  $l$  равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла  $\alpha$  между осью и вектором.

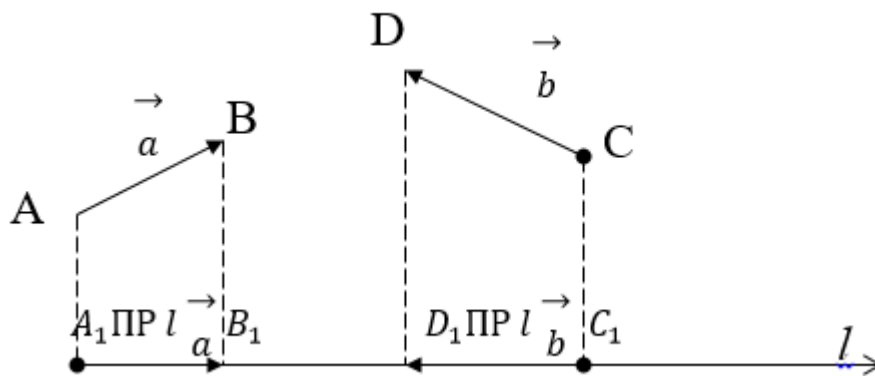


Рис. 11

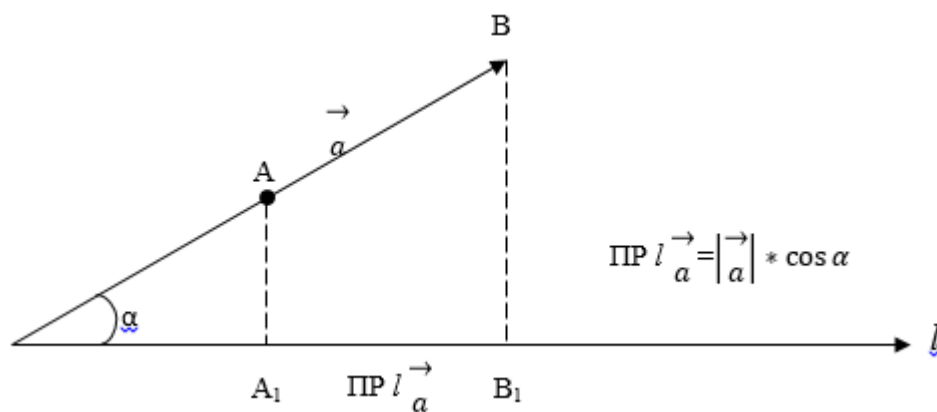


Рис. 12

### 3.3. Прямоугольная система координат

Пусть на плоскости задана пара единичных взаимно перпендикулярных векторов  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ , отложенных от начала координат точки  $O$ .

Такую пару векторов называют перпендикулярным базисом на плоскости.

Совокупность начала  $O$  и прямоугольного базиса  $(\vec{i}, \vec{j})$  называют прямоугольной системой координат на плоскости.

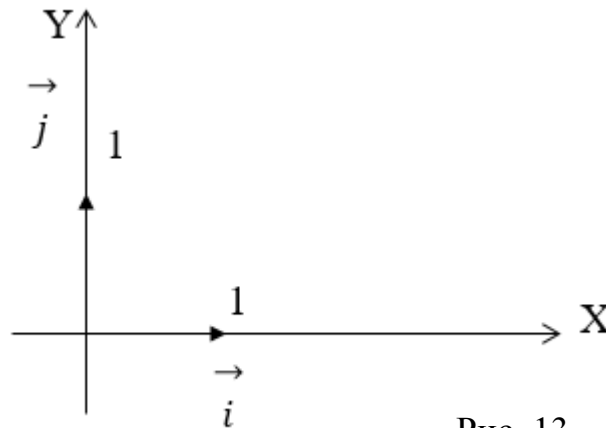


Рис. 13

### 3.4. Координаты вектора

Если некоторый вектор  $\vec{a} \neq 0$  имеет начало в точке  $A(x_A, y_A)$ , а конец - в точку  $B(x_B, y_B)$ , то координатами вектора  $\vec{a}$  называю числа:  $X = x_B - x_A$   
 $Y = y_B - y_A$

Координаты вектора записывают так:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (X, Y) = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

### 3.5. Разложение вектора по координатными осям

Любой вектор  $\vec{a}$  с координатами  $(x, y)$  можно представить в виде:

$$\vec{a} = x * \vec{i} + y * \vec{j}$$

Это выражение называется разложением вектора по осям координат, где  $\vec{i}$  - единичный вектор по оси OX

$\vec{j}$  - единичный вектор по оси OY

Если начало вектора  $\vec{a}$  находится в точке  $A(x_A, y_A)$ , а конец в точке  $B(x_B, y_B)$ , то разложение вектора  $\vec{a}$  записывается так:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (x_B - x_A) * \vec{i} + (y_B - y_A) * \vec{j}$$

### 3.6. Правила действия над векторами, заданными своими координатами

Даны вектора:

$$\vec{a} = (X_1; Y_1) \text{ и } \vec{b} = (X_2; Y_2)$$

Координаты суммы двух (и более) векторов равны:

$$\vec{a} + \vec{b} = (X_1 + X_2; Y_1 + Y_2)$$

Координаты разности:

$$\vec{a} - \vec{b} = (X_1 - X_2; Y_1 - Y_2)$$

Координаты произведения векторов на число:

$$m * \vec{a} = (mX_1; mY_1)$$

### 3.7. Условие коллинеарности двух векторов

1. Если соответствующие координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны, т.е.  $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = k$

$$2. \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \vec{b}$$

Если  $k > 0$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – сонаправленные.

Если  $k < 0$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – противоположно направленные.

### 3.8. Длина вектора. Расстояние между точками на плоскости

Вектор, направленный из начала координат в произвольную точку  $M$  плоскости  $XOY$ , называется радиус-вектором точку  $M$  и обозначается  $\vec{r}$ .

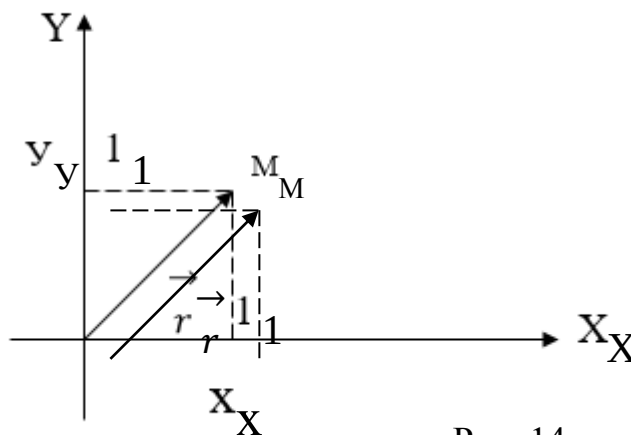


Рис. 14

Его координаты записываются так:

$$\vec{r} = \vec{OM} = (x, y)$$

Длина радиус-вектора  $\vec{r}=(x, y)$  находится по формуле:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Длина произвольного вектора с координатами

$\vec{a} = \vec{AB}=(X_B - X_A; Y_B - Y_A)$  находятся по формуле:

$$|\vec{a}| = |\vec{AB}| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

С помощью этой формулы вычисляем также расстояние между двумя точками на плоскости.

### 3.9. Скалярное произведение двух векторов. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов

Скалярным произведение двух нулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними и обозначается:

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a} ; \vec{b})$$

$$\cos(\angle \vec{a} ; \vec{b}) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  заданы координатами

$\vec{a}=(X_1; Y_1)$  и  $\vec{b}=(X_2; Y_2)$ , то

Скалярное произведение этих векторов можно выразить через их координаты по формуле:

$$\vec{a} * \vec{b} = X_1 * X_2 + Y_1 * Y_2 ,$$

а угол между ними находится так:

$$\cos(\angle \vec{a} ; \vec{b}) = \frac{X_1 * X_2 + Y_1 * Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} * \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения



1. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух нулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является равенство нулю их скалярного произведения

$$(\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{a} * \vec{b} = 0) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

2. Скалярным квадратом вектора  $\vec{a}$  называется скалярное произведение

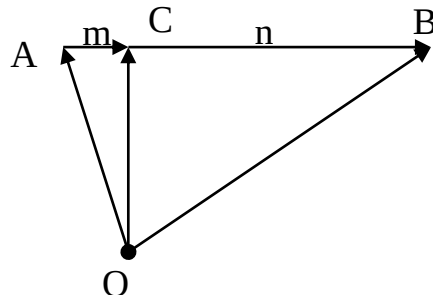
$$\vec{a} * \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

### 3.10. Деление отрезка в данном отношении

Рассмотрим некоторое свойство векторов, часто используемых при решении геометрических задач.

Очевидно, что  $C \in [AB]$  делит отрезок  $[AB]$  в данном отношении  $\frac{m}{n}$ , т.е.  $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{m}{n}$ , тогда и только тогда, когда  $\vec{AC} = \frac{m}{n} \vec{CB}$

(1)



Если A, B и C заданы своими радиус- векторами  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  и  $\vec{OC}$  относительно некоторой точки O, то из (1) следует равенство

$$\vec{OC} - \vec{OA} = \frac{m}{n} (\vec{OB} - \vec{OC}), \text{ из корого находим}$$

$$\vec{OC} = \frac{n}{m+n} * \vec{OA} + \frac{m}{m+n} * \vec{OB} \quad (2)$$

Формула (2) выражает радиус-вектор искомый точки C, делящий отрезок  $[\vec{AB}]$  в отношении  $\frac{m}{n}$ , через радиус- векторы

Заданных точек A и B. В частности, если точка C является серединой отрезка

$$[\vec{AB}], \text{ то } \vec{OC} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})$$

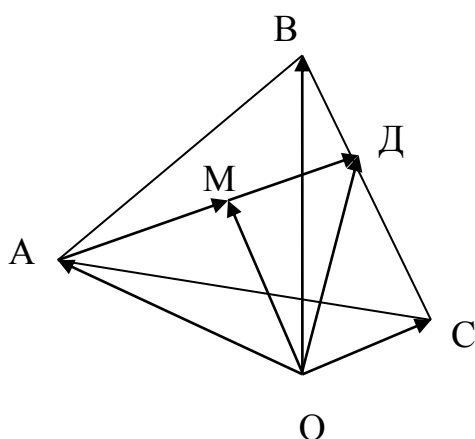
Докажем, что медианы произвольного треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке  $M$  такой, что:

1) Расстояние от точки  $M$  до каждой вершины треугольника равно  $\frac{2}{3}$  длины соответствующей медианы.

2) Для любой точки  $O$  справедливо соотношение:

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

Пусть точка  $M$  пересекает  $\frac{2}{3}$  длины отрезка  $[AD]$  от точки  $A$



Тогда

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AD} = \vec{OA} + \frac{2}{3}(\vec{OD} - \vec{OA}) = \\ &= \vec{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) - \vec{OA}\right) = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})\end{aligned}$$

Тот же результат получается для любой другой медианы треугольника  $ABC$ .

Это говорит о том, что  $M$  – общая точка всех трёх медиан.

Отсюда следует, что, если  $M$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$

и  $O$  – произвольная точка пространства, то имеет место:

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

### Вопросы для самоконтроля

Подумай и ответь:

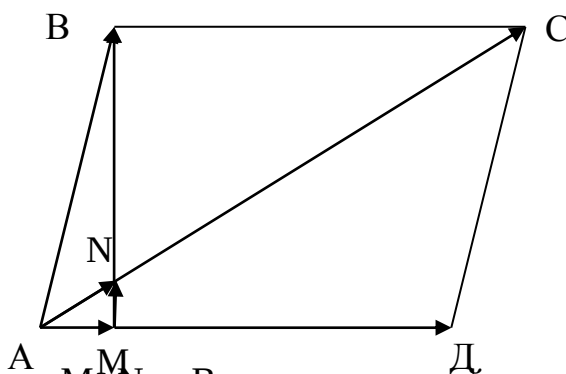
1. Дан вектор  $\vec{AB}$ , отличный от нуля. Можно ли утверждать, что он равен  $\vec{BA}$ ?
2. Известно, что вектор  $\vec{AB}$  равен вектору  $\vec{CD}$ . Можно ли утверждать, что их модули равны?
3. Известны координатные векторы  $\vec{e}_1 = (1; 0)$  и  $\vec{e}_2 = (0; 1)$   
Чему равны координатные вектора  $3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ ?
4. Абсолютная величина вектора  $\vec{ma}$  равна 5. Известны координаты вектора  $\vec{a} = (-3; 4)$ . Чему равна величина  $m$ ?
5. Какому условию должны удовлетворять три вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , чтобы из них можно было образовать треугольник?
6. В каком случае проекция вектора  $a$  на ось  $l$  равна нулю; равна абсолютной величине длине данного вектора?
7. Проверить, перпендикулярны ли векторы:
  - а)  $\vec{a} = (-3; 2)$  и  $\vec{b} = (4; 6)$
  - б)  $\vec{c} = \left(\frac{3}{4}; -1,5\right)$  и  $\vec{d} = \left(\frac{4}{3}; 5\right)$
  - в)  $\vec{m} = (-2; 5)$  и  $\vec{n} = (3; 1)$
8. Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними  
а) острый; б) тупой; в) прямой?
9. Применяя понятие вектора доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
10. Что понимают под линейными операциями над векторами?

## Примеры решения задач

### Задача 1

На стороне АД и диагонали АС параллелограмма ABCD

Взяты точки М и N так, что  $|\vec{AM}| = \frac{1}{5} |\vec{AD}|$  и  $|\vec{AN}| = \frac{1}{6} |\vec{AC}|$



Доказать, что точки М, N и В лежат на одной прямой. В каком отношении точка N делит отрезок [MB]?

#### Решение:

Чтобы убедиться в том, что М, N и В лежат на одной прямой, достаточно доказать, что векторы  $\vec{MN}$  и  $\vec{MB}$  коллинеарны.

По условию имеет

$$\vec{AM} = \frac{1}{5} \vec{AD}, \quad \vec{AN} = \frac{1}{6} \vec{AC}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{6} \vec{AC} - \frac{1}{5} \vec{AD} = \frac{1}{6} (\vec{AD} + \vec{DC}) - \frac{1}{5} \vec{AD} = \\ &= \frac{1}{30} (5\vec{DC} - \vec{AD}) \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\vec{MB} = \vec{AB} - \vec{AM} = \vec{AB} - \frac{1}{5} \vec{AD} = \frac{1}{5} (5\vec{AB} - \vec{AD})$$

Так как  $\vec{AB} = \vec{DC}$ , то из полученных равенств следует, что  $\vec{MB} = 6 \vec{MN}$ .

Это означает, что точки М, N и В лежат на одной прямой.

Из равенства  $\vec{MB} = 6 \vec{MN}$  следует, что  $\frac{|NB|}{|MN|} = 5$ , т.е. точка N делит отрезок [MB] в отношении 5:1

### Задача 2

Дано: A (1;-1); B (-1;0) C(0;1)

$$\vec{AB} = \vec{CD}$$

Найти: D(x,y).

Решение:

1. Если A (1;-1); B (-1;0), то  $\vec{AB} = (-1-1; 0-(-1)) = (-2; 1)$

2. Если C(0;1), D(x,y), то  $\vec{CD} = (x-0; y-1)$ .

3. По условию  $\vec{AB} = \vec{CD}$ , тогда равны их координаты

$$x-0 = -2 \quad x = -2$$

$\Rightarrow$

$$y-1 = 1 \quad y = 2$$

Таким образом, D(-2; 2).

Ответ: D (-2; 2).

### Задача 3

Векторы  $\vec{a} = (1; -1)$  и  $\vec{b} = (-2; -2; k)$  коллинеарны.

Чему равно k?

Решение:

Т.к. векторы коллинеарны по условию, их соответствующие координаты пропорциональны  $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{k}$ , k=2.

Ответ: 2.

### Задача 4

Даны векторы  $\vec{a} = (3; 2)$  и  $\vec{b} = (-2; 1)$

Найти: модуль вектора  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

**Решение:**

Для определения модуля вектора необходимо знать его координаты.

Координаты вектора  $2\vec{a} = (3*2; 2*2) = (6; 4)$ .

Координаты вектора  $3\vec{b} = (-2*3; 1*3) = (-6; 3)$ .

Координаты вектора  $2\vec{a} + 3\vec{b} = (6+(-6); 4+3) = (0; 7)$

Модуль искомого вектора:

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 7^2} = 7.$$

**Ответ:** 7.

**Задача 5**

Выразить через единичные векторы  $\vec{i} + \vec{j}$  следующие векторы:

а)  $\vec{a} = (-2; 4)$

б)  $\vec{a} = \vec{AB}$ , если  $A(-2; -1)$ ;

**Решение:**

а)  $\vec{a} = (-2; 4)$   $x = -2$   $y = 4$ .

По формуле  $\vec{a} = x * \vec{i} + y * \vec{j}$  получим

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j}.$$

б)  $\vec{a} = \vec{AB}$ ,  $A(-2; -1)$ ;  $B(4; -3)$

$$\vec{a} = \vec{AB} = (4 - (-2); -3 - (-1)) = (6; -2)$$

$$\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j}.$$

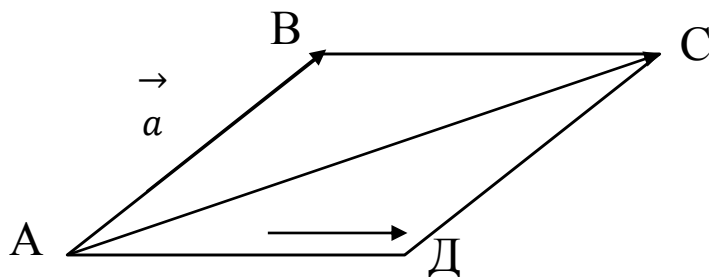
**Ответ:** а)  $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$ , б)  $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ .

**Задача 6**

ABCD- ромб,  $|AB| = 1$ ,  $\angle BAD = 30^\circ$ .

Найти длину диагонали ромба  $|AC|$ .

**Дано:** ABCD- ромб  $|AB|=|a| = 1$ ;  $\angle BAD = 30^\circ$ .



**Найти:**  $|AC|$ .

**Решение:**

1.  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$  по построению, тогда  $AC^2 = (\vec{AB} + \vec{AD})^2 = \vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AD}^2 \Rightarrow |\vec{AC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + 2|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \cos \angle BAD + |\vec{AD}|^2$
2.  $|AB| = |AD| = 1$   $\angle BAD = 30^\circ$  по условию.

$$|\vec{AC}|^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ + 1 = 2 + \sqrt{3}.$$

$$|AC| = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

**Ответ:**  $|AC| = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

**Решите самостоятельно**

- 1) В треугольнике ABC известны  $\vec{AB} = a$  и  $\vec{AC} = b$ .

Построить

а)  $\vec{c} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$       б)  $\vec{d} = \frac{\vec{b} + \vec{a}}{2}$       в)  $\vec{k} = -\frac{\vec{b} + \vec{a}}{2}$ .

- 2) Найти угол между векторами

$$\vec{a} = (1; \sqrt{3}) \text{ и } \vec{b} = (-0,5; 0,5\sqrt{3}).$$

- 3) Даны векторы  $\vec{a} = (1; 0)$  и  $\vec{b} = (1; 1)$ .

Найти такое число  $m$ , чтобы вектор  $\vec{a} + m\vec{b}$  был перпендикулярным вектору  $\vec{a}$ .

- 4) Проверить, коллинеарны ли векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ . Если да, то сонаправлены ли они?

Векторы соответственно заданы точками:

а)  $A(2;1)$      $B(-4; 4)$      $C(-1;1)$      $D(7; -5)$

б)  $A(2;1)$      $B(6; 5)$      $C(3;-1)$      $D(7; -2)$

в)  $A(1;1)$      $B(7; 3)$      $C(-4;-5)$      $D(5; -2)$

- 5) Найти длину вектора  $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ ,

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

6) Даны точки:  $A(-2; -3)$      $B(2; 4)$      $C(5; 1)$

Разложить векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  и  $\vec{CA}$  по единичным векторам  $\vec{i} + \vec{j}$ .

- 7) При каких значениях  $x$  векторы  $(x-1)\vec{a}$  и  $2x\vec{a}$  сонаправлены, если  $\vec{a} \neq 0$ ?

- 8) При каких значениях  $m$  векторы  $(m^2-m-2)\vec{b}$  и  $m^3\vec{b}$  противоположно направлены, если  $\vec{b} \neq 0$ ?

- 9) В ромбе  $ABCD$  длина стороны равна 6, а величина угла  $BAD$  равна  $\frac{\pi}{3}$ . На стороне  $BC$  взята точка  $E$  такая, что  $EC = 2$ . Найти расстояние от  $E$  до центра симметрии ромба.

- 10) В треугольнике  $ABC$  дано:  $\vec{AB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$  и  $\vec{AC} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ ,

где  $\vec{i} + \vec{j}$  – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Доказать, что треугольник  $ABC$  – прямоугольный и вычислить его площадь.



### Список литературы

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и другие. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов средней школы. М. Просвещение, 2020 г
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и другие. Геометрия. Учебник для 10-11 классов средней школы. М. Просвещение, 2021 г.
3. Геометрия: учеб, пособие для СПО/ Н. В. Богомоллов. — М.: Издательство Юрайт, 2022. — 92 с. — Серия : Профессиональное образование.
4. Богомоллов Н.В. Сборник задач по математике: учебное пособие для ССУЗов. М. Дрофа, 2019 г.